Combinações Simples

Raquel de Souza Francisco Bravo
e-mail: raquelbr.ic@gmail.com

15 de setembro de 2016

Combinações Simples

Conteúdo:

- Introdução
- Combinação simples
- Número de combinações simples

Combinações Simples: Introdução

Exemplo 1:

Numa sala estão reunidas três pessoas, P_1, P_2 e P_3.

De quantas maneiras podemos selecionar duas pessoas?

Combinações Simples: Introdução

Exemplo 1:

Numa sala estão reunidas três pessoas, P_1, P_2 e P_3.
De quantas maneiras podemos selecionar <u>duas</u> pessoas?

Reformulação do exemplo:

Seja $A = \{ P_1, P_2, P_3 \}$. Quantos subconjuntos de 2 elementos possui A?

Combinações Simples: Introdução

Exemplo 1 (continuação):

Resolução:

$A = \{ P_1, P_2, P_3 \}$

Exemplo 1 (continuação):

Resolução:

$A = \{ P_1, P_2, P_3 \}$

N: número de subconjuntos de 2 elementos de A

Combinações Simples: Introdução

Exemplo 1 (continuação):

Resolução:

$A = \{ P_1, P_2, P_3 \}$

N: número de subconjuntos de 2 elementos de A

Raciocínio 1: enumeração dos subconjuntos de A

$B = \{ \{ P_1, P_2 \}, \{ P_1, P_3 \}, \{ P_2, P_3 \} \}$

Combinações Simples: Introdução

Exemplo 1 (continuação):

Resolução:

$$A = \{ P_1, P_2, P_3 \}$$

N: número de subconjuntos de 2 elementos de A

Raciocínio 1: enumeração dos subconjuntos de A

$$B = \{ \{ P_1, P_2 \}, \{ P_1, P_3 \}, \{ P_2, P_3 \} \}$$

Resposta:

$$N = |B| = n(B) = 3$$

Combinações Simples: Introdução

Exemplo 1 (raciocínio 2):

Sem enumeração dos subconjuntos de A (usando arranjos e permutações)

Combinações Simples: Introdução

Exemplo 1 (raciocínio 2):

Sem enumeração dos subconjuntos de A
(usando arranjos e permutações)

Os arranjos de 3 elementos tomados 2 a 2 consideram a ordem!

Combinações Simples: Introdução

Exemplo 1 (raciocínio 2):

Sem enumeração dos subconjuntos de A
(usando arranjos e permutações)

Os arranjos de 3 elementos tomados 2 a 2 consideram a ordem!

Então devemos reduzir a 1 possibilidade todas as permutações dos mesmos elementos.

Combinações Simples: Introdução

Exemplo 1 (continuação):

$A(3, 2)$:

Combinações Simples: Introdução

Exemplo 1 (continuação):

A(3, 2):

P_1, P_2 P_1, P_3 P_2, P_3

Combinações Simples: Introdução

Exemplo 1 (continuação):

A(3, 2):

P_1, P_2	P_1, P_3	P_2, P_3
P_2, P_1	P_3, P_1	P_3, P_2

Combinações Simples: Introdução

Exemplo 1 (continuação):

A(3, 2):

$$2! = P_2 \begin{cases} P_1, P_2 \quad P_1, P_3 \quad P_2, P_3 \\ P_2, P_1 \quad P_3, P_1 \quad P_3, P_2 \end{cases}$$

Combinações Simples: Introdução

Exemplo 1 (continuação):

A(3, 2):

$2! = P_2$			
	P_1, P_2	P_1, P_3	P_2, P_3
	P_2, P_1	P_3, P_1	P_3, P_2
	1 subconjunto	1 subconjunto	1 subconjunto

Exemplo 1 (continuação):

A(3, 2):

$2! = P_2$

P_1, P_2	P_1, P_3	P_2, P_3
P_2, P_1	P_3, P_1	P_3, P_2
1 subconjunto	1 subconjunto	1 subconjunto

Resumindo:

$$P_2 \xrightarrow{\text{correspondem}} 1 \ \text{subconjunto}$$

Combinações Simples: Introdução

Exemplo 1 (continuação):

A(3, 2):

$$2! = P_2 \left\{ \boxed{\begin{matrix} P_1, P_2 \\ P_2, P_1 \end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix} P_1, P_3 \\ P_3, P_1 \end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix} P_2, P_3 \\ P_3, P_2 \end{matrix}} \right.$$

1 subconjunto 1 subconjunto 1 subconjunto

Resumindo:

$$P_2 \xrightarrow{\text{correspondem}} 1 \text{ subconjunto}$$

$$A(3, 2) \xrightarrow{\text{correspondem}} N = \frac{A(3, 2)}{P_2} \text{ total de subconjuntos}$$

Combinações Simples: Introdução

Exemplo 1 (continuação):

A(3, 2):

$$2! = P_2 \begin{cases} \boxed{\begin{matrix} P_1, P_2 \\ P_2, P_1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} P_1, P_3 \\ P_3, P_1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} P_2, P_3 \\ P_3, P_2 \end{matrix}} \end{cases}$$

1 subconjunto 1 subconjunto 1 subconjunto

Resumindo:

$P_2 \xrightarrow{\text{correspondem}}$ 1 subconjunto

$A(3, 2) \xrightarrow{\text{correspondem}} N = \dfrac{A(3, 2)}{P_2}$ total de subconjuntos

Resposta:

$$N = \frac{A(3, 2)}{P_2} = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = \frac{3\,.\,2!}{2!\,.\,1!} = 3$$

Combinações Simples

Exemplo 2:

Uma fábrica de sucos está lançando no mercado 5 novos sabores. Como propaganda,cada pessoa pode experimentar 2 sabores diferentes. Quantas opções têm cada um?

Combinações Simples

Exemplo 2:

Uma fábrica de sucos está lançando no mercado 5 novos sabores. Como propaganda,cada pessoa pode experimentar 2 sabores diferentes. Quantas opções têm cada um?

Resolução: S_1, S_2, S_3, S_4, S_5

Combinações Simples

Exemplo 2:

Uma fábrica de sucos está lançando no mercado 5 novos sabores. Como propaganda,cada pessoa pode experimentar 2 sabores diferentes. Quantas opções têm cada um?

Resolução: S_1, S_2, S_3, S_4, S_5

1 opção: uma escolha de 2 sabores entre 5

Combinações Simples

Exemplo 2:

Uma fábrica de sucos está lançando no mercado 5 novos sabores. Como propaganda,cada pessoa pode experimentar 2 sabores diferentes. Quantas opções têm cada um?

Resolução: S_1, S_2, S_3, S_4, S_5

1 opção: uma escolha de 2 sabores entre 5

(não importa a ordem)

Combinações Simples

Exemplo 2:

Uma fábrica de sucos está lançando no mercado 5 novos sabores. Como propaganda,cada pessoa pode experimentar 2 sabores diferentes. Quantas opções têm cada um?

Resolução: S_1, S_2, S_3, S_4, S_5

1 opção: uma escolha de 2 sabores entre 5
(não importa a ordem)

N: número de opções

Combinações Simples

Exemplo 2:

Uma fábrica de sucos está lançando no mercado 5 novos sabores. Como propaganda,cada pessoa pode experimentar 2 sabores diferentes. Quantas opções têm cada um?

Resolução: S_1, S_2, S_3, S_4, S_5

1 opção: uma escolha de 2 sabores entre 5
(não importa a ordem)

N: número de opções

$$P_2 \xrightarrow{\text{da lugar a}} 1 \text{ opção}$$

Combinações Simples

Exemplo 2:

Uma fábrica de sucos está lançando no mercado 5 novos sabores. Como propaganda,cada pessoa pode experimentar 2 sabores diferentes. Quantas opções têm cada um?

Resolução: S_1, S_2, S_3, S_4, S_5

1 opção: uma escolha de 2 sabores entre 5
(não importa a ordem)

N: número de opções

$P_2 \xrightarrow{\text{da lugar a}}$ 1 opção

$A(5, 2) \xrightarrow{\text{da lugar a}}$ N opções $= \dfrac{A(5, 2)}{P_2}$

Combinações Simples

Exemplo 2:

Uma fábrica de sucos está lançando no mercado 5 novos sabores. Como propaganda,cada pessoa pode experimentar 2 sabores diferentes. Quantas opções têm cada um?

Resolução: S_1, S_2, S_3, S_4, S_5

1 opção: uma escolha de 2 sabores entre 5 (não importa a ordem)

N: número de opções

$$P_2 \xrightarrow{\text{da lugar a}} 1 \text{ opção}$$

$$A(5, 2) \xrightarrow{\text{da lugar a}} N \text{ opções} = \frac{A(5, 2)}{P_2}$$

Resposta:

$$N = \frac{A(5, 2)}{P_2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5!}{2!\,3!} = 10$$

Combinações Simples

- Características dos exemplos
  - Os elementos considerados $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são diferentes

Combinações Simples

Características dos exemplos

- Os elementos considerados a_1, a_2, ..., a_n são diferentes
- Cada escolha de r elementos distintos (sem importar a ordem) entre a_1, a_2, ..., a_n corresponde a uma possibilidade

Combinações Simples

- Características dos exemplos
  - Os elementos considerados $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são diferentes
  - Cada escolha de r elementos distintos (sem importar a ordem) entre $a_1, a_2, \ldots, a_n$ corresponde a uma possibilidade
  - Na obtenção do número de possibilidades aplica-se os princípios aditivo e multiplicativo (usa-se os conceitos de arranjos e permutações)

Combinações Simples

Definição:

Dados n objetos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, uma combinação simples de n elementos tomados r a r é uma seleção de r elementos distintos escolhidos entre $a_1, a_2, \ldots, a_n$, não importando a ordem da escolha, sendo r e n números naturais com $1 \leq r \leq n$.

Combinações Simples

Definição:

Dados n objetos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, uma combinação simples de n elementos tomados r a r é uma seleção de r elementos distintos escolhidos entre $a_1, a_2, \ldots, a_n$, não importando a ordem da escolha, sendo r e n números naturais com $1 \leq r \leq n$.

Ilustração:

Dados as pessoas P_1, P_2, P_3,

P_1, P_3 é uma combinação de 3 elementos tomados 2 a 2

Número de Combinações Simples

Problema:

Dados **n** elementos distintos, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, encontrar o número de combinações simples dos **n** elementos tomados **r** a **r**

Número de Combinações Simples

- Problema:

  Dados n elementos distintos, $a_1, a_2, \ldots, a_n$,
  encontrar o número de combinações simples dos
  n elementos tomados r a r

- Propriedade:

  O número de combinações simples de n elementos distintos tomados r a r, denominado $C(n, r)$, é:

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \quad \left(= \frac{A(n, r)}{P_r} \right)$$

Número de Combinações Simples

- **Problema:**

  Dados n elementos distintos, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, encontrar o número de combinações simples dos n elementos tomados r a r

- **Propriedade:**

  O número de combinações simples de n elementos distintos tomados r a r, denominado $C(n, r)$, é:

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \quad \left(= \frac{A(n, r)}{P_r} \right)$$

- **Observação:**

$$C(n, r) = C(n, n-r) = \frac{n!}{(n-r)!\,(n-(n-r))!}$$

Número de Combinações Simples

Exemplo 3:

Um técnico convocou 9 jogadores para um campeonato de vôlei. Para formar a equipe inicial deve escolher 5 jogadores. Quantas opções ele tem?

Número de Combinações Simples

Exemplo 3:

Um técnico convocou 9 jogadores para um campeonato de vôlei. Para formar a equipe inicial deve escolher 5 jogadores. Quantas opções ele tem?

Resolução:

n = número de jogadores = 9

Número de Combinações Simples

Exemplo 3:

Um técnico convocou 9 jogadores para um campeonato de vôlei. Para formar a equipe inicial deve escolher 5 jogadores. Quantas opções ele tem?

Resolução:

n = número de jogadores = 9

r = número de jogadores da equipe = 5

Número de Combinações Simples

Exemplo 3:

Um técnico convocou 9 jogadores para um campeonato de vôlei. Para formar a equipe inicial deve escolher 5 jogadores. Quantas opções ele tem?

Resolução:

n = número de jogadores = 9

r = número de jogadores da equipe = 5

total de opções $= C(9, 5) = \dfrac{9!}{5!\,(9-5)!} = \dfrac{9.8.7.6.5!}{5!\,4.3.2} = 9.2.7 = 126$

Número de Combinações Simples

Exemplo 3:

Um técnico convocou 9 jogadores para um campeonato de vôlei. Para formar a equipe inicial deve escolher 5 jogadores. Quantas opções ele tem?

Resolução:

n = número de jogadores = 9

r = número de jogadores da equipe = 5

$$\text{total de opções} = C(9, 5) = \frac{9!}{5!\,(9-5)!} = \frac{9.8.7.6.5!}{5!\,4.3.2} = 9.2.7 = 126$$

Resposta:

O técnico tem 126 opções de formar a equipe inicial.

Número de Combinações Simples

Exemplo 4:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formadas?

Número de Combinações Simples

Exemplo 4:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formadas?

Resolução:

n = número de professores = 12 + 12 = 24

Número de Combinações Simples

Exemplo 4:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formadas?

Resolução:

n = número de professores = 12 + 12 = 24

r = número de professores em uma comissão = 8

Exemplo 4:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formadas?

Resolução:

n = número de professores = 12 + 12 = 24

r = número de professores em uma comissão = 8

N: número de comissões possíveis

Número de Combinações Simples

Exemplo 4:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formadas?

Resolução:

n = número de professores = 12 + 12 = 24

r = número de professores em uma comissão = 8

N: número de comissões possíveis

Resposta:

Podem ser formadas

$$N = C(24, 8) = \frac{24!}{8!\,16!} = \frac{24.23.22.21.20.19.18.17}{8.7.6.5.4.3.2} = 735471 \text{ comissões}$$

Número de Combinações Simples

Exemplo 5:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formada havendo 3 professores de matemática?

Número de Combinações Simples

Exemplo 5:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formada havendo 3 professores de matemática?

Resolução:

número de professores $= 12 + 12 = 24$

Número de Combinações Simples

Exemplo 5:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formada havendo 3 professores de matemática?

Resolução:

número de professores $= 12 + 12 = 24$

número de professores de matemática numa comissão $= 3$

Número de Combinações Simples

Exemplo 5:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formada havendo 3 professores de matemática?

Resolução:

número de professores $= 12 + 12 = 24$

número de professores de matemática numa comissão $= 3$

número de professores de informática numa comissão $= 8 - 3 = 5$

Número de Combinações Simples

Exemplo 5:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formada havendo 3 professores de matemática?

Resolução:

número de professores = 12 + 12 = 24

número de professores de matemática numa comissão = 3

número de professores de informática numa comissão = 8 – 3 = 5

Possibilidades: $\underbrace{C(12, 3)}_{\substack{\text{matemática} \\ \text{(3 entre 12)}}}$

Número de Combinações Simples

Exemplo 5:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formada havendo 3 professores de matemática?

Resolução:

número de professores = 12 + 12 = 24

número de professores de matemática numa comissão = 3

número de professores de informática numa comissão = 8 – 3 = 5

Possibilidades: $$\underbrace{C(12, 3)}_{\substack{\text{matemática} \\ \text{(3 entre 12)}}} \times \underbrace{C(12, 5)}_{\substack{\text{informática} \\ \text{(5 entre 12)}}}$$

Número de Combinações Simples

Exemplo 5:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formada havendo 3 professores de matemática?

Resolução:

número de professores $= 12 + 12 = 24$

número de professores de matemática numa comissão $= 3$

número de professores de informática numa comissão $= 8 - 3 = 5$

Possibilidades: $$\underbrace{C(12,3)}_{\substack{\text{matemática} \\ (3 \text{ entre } 12)}} \times \underbrace{C(12,5)}_{\substack{\text{informática} \\ (5 \text{ entre } 12)}} = \frac{12!}{3!\,9!} \times \frac{12!}{5!\,7!}$$

Número de Combinações Simples

Exemplo 5:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formada havendo 3 professores de matemática?

Resolução:

número de professores = 12 + 12 = 24

número de professores de matemática numa comissão = 3

número de professores de informática numa comissão = 8 − 3 = 5

Possibilidades: $$\underbrace{C(12,3)}_{\substack{\text{matemática} \\ \text{(3 entre 12)}}} \times \underbrace{C(12,5)}_{\substack{\text{informática} \\ \text{(5 entre 12)}}} = \frac{12!}{3!\,9!} \times \frac{12!}{5!\,7!}$$

Resposta:

O número de comissões é 174240.

Número de Combinações Simples

Exemplo 6:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formadas havendo pelo menos 1 professor de matemática?

Número de Combinações Simples

Exemplo 6:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formadas havendo pelo menos 1 professor de matemática?

Resolução:

Raciocínio 1:

Número de Combinações Simples

Exemplo 6:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formadas havendo pelo menos 1 professor de matemática?

Resolução:

Raciocínio 1:

U: conjunto universo := o conjunto de todas as comissões de 8 professores

Número de Combinações Simples

Exemplo 6:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formadas havendo pelo menos 1 professor de matemática?

Resolução:

Raciocínio 1:

U: conjunto universo := o conjunto de todas as comissões de 8 professores

A:= conjunto de todas as comissões com pelo menos 1 professor de matemática

Número de Combinações Simples

Exemplo 6:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formadas havendo pelo menos 1 professor de matemática?

Resolução:

Raciocínio 1:

U: conjunto universo := o conjunto de todas as comissões de 8 professores

A:= conjunto de todas as comissões com pelo menos 1 professor de matemática

B:= conjunto de todas as comissões sem professor de matemática

Número de Combinações Simples

Exemplo 6 (continuação):

$$\begin{cases} A = U - B \\ \text{número de comissões} := N = |A| = |U| - |B| \end{cases}$$

Número de Combinações Simples

Exemplo 6 (continuação):

$$\begin{cases} A = U - B \\ \text{número de comissões} := N = |A| = |U| - |B| \end{cases}$$

$|U|$

Número de Combinações Simples

Exemplo 6 (continuação):

$$\begin{cases} A = U - B \\ \text{número de comissões} := N = |A| = |U| - |B| \end{cases}$$

$$|U| = C(24, 8)$$

Número de Combinações Simples

Exemplo 6 (continuação):

$$\begin{cases} A = U - B \\ \text{número de comissões} := N = |A| = |U| - |B| \end{cases}$$

$$|U| = C(24, 8)\ ,\ |B|$$

Exemplo 6 (continuação):

$$\begin{cases} A = U - B \\ \text{número de comissões} := N = |A| = |U| - |B| \end{cases}$$

$$|U| = C(24, 8)\ ,\ |B| = C(12, 8)$$

Número de Combinações Simples

Exemplo 6 (continuação):

$$\begin{cases} A = U - B \\ \text{número de comissões} := N = |A| = |U| - |B| \end{cases}$$

$$\begin{cases} |U| = C(24, 8)\ ,\ |B| = C(12, 8) \\ N = C(24, 8) - C(12, 8) = \dfrac{24!}{8!\ 16!} - \dfrac{12!}{8!\ 4!} = 734976 \end{cases}$$

Número de Combinações Simples

Exemplo 6 (continuação):

$$\begin{cases} A = U - B \\ \text{número de comissões} := N = |A| = |U| - |B| \end{cases}$$

$$\begin{cases} |U| = C(24, 8)\ ,\ |B| = C(12, 8) \\ N = C(24, 8) - C(12, 8) = \dfrac{24!}{8!\ 16!} - \dfrac{12!}{8!\ 4!} = 734976 \end{cases}$$

Resposta:

O número de comissões possíveis neste caso é 734976.

Número de Combinações Simples

Exemplo 6 (raciocínio 2):

A_i := conjunto de todas as comissões com i professores de matemática, para $i = 1, 2, \ldots, 8$

Número de Combinações Simples

Exemplo 6 (raciocínio 2):

A_i := conjunto de todas as comissões com i professores de matemática, para $i = 1, 2, \ldots, 8$

$$A = \bigcup_{i=1}^{8} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_8$$

Número de Combinações Simples

Exemplo 6 (raciocínio 2):

A_i := conjunto de todas as comissões com i professores de matemática, para $i = 1, 2, \ldots, 8$

$$A = \bigcup_{i=1}^{8} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_8$$

$$N = |A| \overset{\text{princípio}}{\underset{\text{aditivo}}{=}} \sum_{i=1}^{8} |A_i| = |A_1| \; 1 \; |A_2| + \ldots + |A_8|$$

Número de Combinações Simples

Exemplo 6 (raciocínio 2):

A_i := conjunto de todas as comissões com i professores de matemática, para $i = 1, 2, \ldots, 8$

$$A = \bigcup_{i=1}^{8} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_8$$

$$N = |A| \overset{\text{princípio}}{\underset{\text{aditivo}}{=}} \sum_{i=1}^{8} |A_i| = |A_1| \; 1 \; |A_2| + \ldots + |A_8|$$

$|A_i|$

Número de Combinações Simples

Exemplo 6 (raciocínio 2):

A_i := conjunto de todas as comissões com i professores de matemática, para $i = 1, 2, \ldots , 8$

$$A = \bigcup_{i=1}^{8} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_8$$

$$N = |A| \overset{\text{princípio}}{\underset{\text{aditivo}}{=}} \sum_{i=1}^{8} |A_i| = |A_1| \; 1 \; |A_2| + \ldots + |A_8|$$

$$|A_i| \overset{\text{princípio}}{\underset{\text{multiplicativo}}{=}} C(12, i)\, C(12, 8 - i) \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots , 8$$

Número de Combinações Simples

Exemplo 6 (raciocínio 2):

A_i := conjunto de todas as comissões com i professores de matemática, para $i = 1, 2, \ldots, 8$

$$A = \bigcup_{i=1}^{8} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_8$$

$$N = |A| \underset{\text{aditivo}}{\overset{\text{princípio}}{=}} \sum_{i=1}^{8} |A_i| = |A_1| \; 1 \; |A_2| + \ldots + |A_8|$$

$$|A_i| \underset{\text{multiplicativo}}{\overset{\text{princípio}}{=}} C(12, i)\, C(12, 8 - i) \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, 8$$

$$N = C(12, 1)\, C(12, 7) + C(12, 2)\, C(12, 6) + C(12, 3)\, C(12, 5) + C(12, 4)\, C(12, 4) + C(12, 5)\, C(12, 3) + C(12, 6)\, C(12, 2) + C(12, 7)\, C(12, 1) + C(12, 8)\, C(12, 0)$$

Número de Combinações Simples

Exemplo 6 (raciocínio 2):

A_i := conjunto de todas as comissões com i professores de matemática, para $i = 1, 2, \ldots, 8$

$$A = \bigcup_{i=1}^{8} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_8$$

$$N = |A| \overset{\text{princípio}}{\underset{\text{aditivo}}{=}} \sum_{i=1}^{8} |A_i| = |A_1| \ 1 \ |A_2| + \ldots + |A_8|$$

$$|A_i| \overset{\text{princípio}}{\underset{\text{multiplicativo}}{=}} C(12, i)\, C(12, 8-i) \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, 8$$

$$\begin{aligned} N = {} & C(12, 1)\, C(12, 7) + C(12, 2)\, C(12, 6) + C(12, 3)\, C(12, 5) + \\ & C(12, 4)\, C(12, 4) + C(12, 5)\, C(12, 3) + C(12, 6)\, C(12, 2) + \\ & C(12, 7)\, C(12, 1) + \underbrace{C(12, 8)\, C(12, 0)}_{1} \end{aligned}$$

Número de Combinações Simples

Exemplo 7:

De quantos modos é possível dividir 20 pessoas em um grupo de 12 e um grupo de 8?

Número de Combinações Simples

Exemplo 7:

De quantos modos é possível dividir 20 pessoas em um grupo de 12 e um grupo de 8?

Resolução:

Raciocínio 1:

N: modos de dividir 20 em 1 grupo de 12 e outro de 8

Número de Combinações Simples

Exemplo 7:

De quantos modos é possível dividir 20 pessoas em um grupo de 12 e um grupo de 8?

Resolução:

Raciocínio 1:

N: modos de dividir 20 em 1 grupo de 12 e outro de 8

M: quantidade de grupos de 12 dentre 20 = C(20, 12)

Número de Combinações Simples

Exemplo 7:

De quantos modos é possível dividir 20 pessoas em um grupo de 12 e um grupo de 8?

Resolução:

Raciocínio 1:

N: modos de dividir 20 em 1 grupo de 12 e outro de 8

- M: quantidade de grupos de 12 dentre 20 = C(20, 12)
- Dado 1 grupo de 12, o grupo de 8 fica definido.

Número de Combinações Simples

Exemplo 7:

De quantos modos é possível dividir 20 pessoas em um grupo de 12 e um grupo de 8?

Resolução:

Raciocínio 1:

N: modos de dividir 20 em 1 grupo de 12 e outro de 8

- M: quantidade de grupos de 12 dentre 20 = C(20, 12)
- Dado 1 grupo de 12, o grupo de 8 fica definido.

Resposta:

$$N = C(20, 12) = \frac{20!}{12!\,8!}$$

Número de Combinações Simples

Exemplo 7 (raciocínio 2):

N: modos de dividir 20 em 1 grupo de 12 e outro de 8

- M: quantidade de grupos de 8 dentre 20 = C(20, 8)

Número de Combinações Simples

Exemplo 7 (raciocínio 2):

N: modos de dividir 20 em 1 grupo de 12 e outro de 8

- M: quantidade de grupos de 8 dentre 20 = C(20, 8)
- Dado 1 grupo de 8, o grupo de 12 fica definido.

Número de Combinações Simples

Exemplo 7 (raciocínio 2):

N: modos de dividir 20 em 1 grupo de 12 e outro de 8

- M: quantidade de grupos de 8 dentre 20 = C(20, 8)
- Dado 1 grupo de 8, o grupo de 12 fica definido.

Resposta:

$$N = C(20, 8) = \frac{20!}{8!\,12!} = C(20, 12)$$

Número de Combinações Simples

Exemplo 8:

De quantos modos é possível dividir 20 pessoas em 2 grupos de 10 ?

Exemplo 8:

De quantos modos é possível dividir 20 pessoas em 2 grupos de 10 ?

Resolução:

N: modos de dividir 20 em 2 grupos de 10

Exemplo 8:

De quantos modos é possível dividir 20 pessoas em 2 grupos de 10 ?

Resolução:

N: modos de dividir 20 em 2 grupos de 10

⇒ M: quantidade de grupos de 10 dentre 20 = C(20, 10)

Número de Combinações Simples

Exemplo 8:

De quantos modos é possível dividir 20 pessoas em 2 grupos de 10 ?

Resolução:

N: modos de dividir 20 em 2 grupos de 10

- M: quantidade de grupos de 10 dentre 20 = C(20, 10)
- Dado 1 grupo de 10, o outro grupo fica definido.

Número de Combinações Simples

Exemplo 8 (continuação):

Diferença com o exemplo 7:

Número de Combinações Simples

Exemplo 8 (continuação):

Diferença com o exemplo 7:

Os 2 grupos são de 10 pessoas,

Exemplo 8 (continuação):

Diferença com o exemplo 7:

Os 2 grupos são de 10 pessoas,

(estamos dividindo as 20 pessoas por 2)

Número de Combinações Simples

Exemplo 8 (continuação):

Diferença com o exemplo 7:

Os 2 grupos são de 10 pessoas,

(estamos dividindo as 20 pessoas por 2)

- Ilustração:

$p_1, p_2, \ldots, p_{20}$ as pessoas

Número de Combinações Simples

Exemplo 8 (continuação):

Diferença com o exemplo 7:

Os 2 grupos são de 10 pessoas,

(estamos dividindo as 20 pessoas por 2)

- Ilustração:

$p_1, p_2, \ldots, p_{20}$ as pessoas

a escolha $p_1, p_2, \ldots, p_{10}$ define o outro grupo $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{20}$

Número de Combinações Simples

Exemplo 8 (continuação):

Diferença com o exemplo 7:

Os 2 grupos são de 10 pessoas,

(estamos dividindo as 20 pessoas por 2)

- Ilustração:

$p_1, p_2, \ldots, p_{20}$ as pessoas

a escolha $p_1, p_2, \ldots, p_{10}$ define o outro grupo $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{20}$

a escolha $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{20}$ define o outro grupo $p_1, p_2, \ldots, p_{10}$

Número de Combinações Simples

Exemplo 8 (continuação):

Diferença com o exemplo 7:

Os 2 grupos são de 10 pessoas,

(estamos dividindo as 20 pessoas por 2)

- Ilustração:

$p_1, p_2, \dots, p_{20}$ as pessoas

a escolha $p_1, p_2, \dots, p_{10}$ define o outro grupo $p_{11}, p_{12}, \dots, p_{20}$

a escolha $p_{11}, p_{12}, \dots, p_{20}$ define o outro grupo $p_1, p_2, \dots, p_{10}$

Resposta:

$$N = \frac{C(20, 10)}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{20!}{10!\,10!}$$

Número de Combinações Simples

Exemplo 9:

Um concurso para professor tem 20 inscritos. Devem ser selecionadas 10 pessoas para realizar a prova em 1 dia e 10 para fazê-la no dia seguinte. De quantos modos é possível fazer a seleção?

Número de Combinações Simples

Exemplo 9:

Um concurso para professor tem 20 inscritos. Devem ser selecionadas 10 pessoas para realizar a prova em 1 dia e 10 para fazê-la no dia seguinte. De quantos modos é possível fazer a seleção?

Resolução:

Relações com o exercício 8:

Número de Combinações Simples

Exemplo 9:

Um concurso para professor tem 20 inscritos. Devem ser selecionadas 10 pessoas para realizar a prova em 1 dia e 10 para fazê-la no dia seguinte. De quantos modos é possível fazer a seleção?

Resolução:

Relações com o exercício 8:

- Semelhança: Escolha de 2 grupos de 10 entre 20

Número de Combinações Simples

Exemplo 9:

Um concurso para professor tem 20 inscritos. Devem ser selecionadas 10 pessoas para realizar a prova em 1 dia e 10 para fazê-la no dia seguinte. De quantos modos é possível fazer a seleção?

Resolução:

Relações com o exercício 8:

- Semelhança: Escolha de 2 grupos de 10 entre 20
- Diferença: Existe uma ordem entre os grupos determinada pelo dia da prova.

Número de Combinações Simples

Exemplo 9 (continuação):

a escolha $p_1, p_2, \ldots, p_{10}$ (1^o dia) define o grupo $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{20}$ (2^o dia)

Número de Combinações Simples

Exemplo 9 (continuação):

a escolha $p_1, p_2, \ldots, p_{10}$ (1º dia) define o grupo $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{20}$ (2º dia)

a escolha $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{20}$ (1º dia) define o grupo $p_1, p_2, \ldots, p_{10}$ (2º dia)

Número de Combinações Simples

Exemplo 9 (continuação):

seleções distintas

$\left\{ \begin{array}{l} \text{a escolha } p_1, p_2, \ldots, p_{10} \ (1^{\circ} \text{ dia}) \text{ define o} \\ \text{grupo } p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{20} \ (2^{\circ} \text{ dia}) \\ \\ \text{a escolha } p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{20} \ (1^{\circ} \text{ dia}) \text{ define o} \\ \text{grupo } p_1, p_2, \ldots, p_{10} \ (2^{\circ} \text{ dia}) \end{array} \right.$

Número de Combinações Simples

Exemplo 9 (continuação):

seleções distintas $\begin{cases} \text{a escolha } p_1, p_2, \ldots, p_{10} \text{ (1º dia) define o} \\ \text{grupo } p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{20} \text{ (2º dia)} \\ \text{a escolha } p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{20} \text{ (1º dia) define o} \\ \text{grupo } p_1, p_2, \ldots, p_{10} \text{ (2º dia)} \end{cases}$

Resposta:

Tem-se $C(20, 10)$ possibilidades de seleção.

Número de Combinações Simples

Exemplo 10:

De quantos modos é possível dividir 20 pessoas em 4 grupos de 5?